Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 7 im Wintersemester 2021 (am 26.11.21):
Reguläre Funktionen

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.
y.z	verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

5b Reguläre Funktionen

5b.1. Offene Hauptmengen (vgl. 1.3.5)

5b.1.1 Definition

Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Eine offene Hauptmenge von X ist eine Menge der Gestalt

$$D(f) := \{x \in X \mid f(x) = 0\} \ (= X - V(f))$$

mit $f \in k[X]$.

Bemerkung

Als Komplement der abgeschlossenen Menge V(f) ($\subseteq X$) ist D(f) offen bezüglich der Zariski-Topologie von X.

5b.1.2 Eigenschaften offener Hauptmengen

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge und $f,g \in k[X]$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(i) $D(f^n) = D(f)$ für jede natürliche Zahl n.

(ii) $D(f \cdot g) = D(f) \cap D(g)$.

(iii) $D(f) \subseteq D(g) \Leftrightarrow f^n \in g \cdot k[X]$ für eine natürliche Zahl n.

(iv) Die offenen Hauptmengen von X bilden eine Topologie-Basis von X. Genauer: jede offene Menge von X ist sogar Vereinigung von endlich vielen offenen Hauptmengen.

(v) X ist quasi-kompakt, d.h. für jede offene Überdeckung von X ist X bereits Vereinigung von endlich vielen Mengen dieser Überdeckung.

Beweis. Zu (i). Weil $f: X \longrightarrow k$ eine Funktion mit Werten in einem Körper ist, gilt

$$f^n(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ für jedes } x \in X,$$

also

$$f^n(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \text{ für jedes } x \in X.$$

Zu (ii). Weil $f,g: X \longrightarrow k$ Funktionen mit Werten in einem Körper sind, gilt

$$(f\bullet g)(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ oder } g(x) = 0 \text{ für jedes } x \in X,$$

also

$$(f\bullet g)(x) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq 0 \text{ und } g(x) \neq 0 \text{ für jedes } x \in X,$$

Zu (iii). Beweis von "$\Leftarrow$": Sei $f^n \in g\bullet k[X]$, d.h. $f^n \in g\bullet h$ mit $h \in k[X]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} D(f) &= D(f^n) && \text{(nach (i))} \\ &= D(g) \bigcap D(h) && \text{(nach (ii))} \\ &\subseteq D(g). \end{aligned}$$

Beweis von "$\Rightarrow$": Sei $D(f) \subseteq D(g)$. Dann gilt nach Definition der offenen Hauptmengen

$$V(g\bullet k[X]) = V(g) \subseteq V(f) = V(f\bullet k[X])$$

also nach 1.1.4, Aufgabe 3,

$$f \in \sqrt{f\bullet k[X]} \subseteq \sqrt{g\bullet k[X]},$$

d.h. eine Potenz von f liegt in $g\bullet k[X]$.

Zu (iv). Jede offene Menge U von X ist Komplement einer abgeschlossnen Menge und damit von der Gestalt

$$U = X - V(I)$$

mit einem Ideal $I \subseteq k[X]$. Weil k[X] noethersch ist, hat I die Gestalt.

$$I = \sum_{i=1}^{s} f_i\bullet k[X] \text{ mit } f_1,...,f_r \in k[X].$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} U &= X - V(f_1,...,f_r) \\ &= X - V(f_1) \bigcap ... \bigcap V(f_r) \\ &= (X - V(f_1)) \bigcup ... \bigcup (X - V(f_r)) \\ &= D(f_1) \bigcup ... \bigcup D(f_r). \end{aligned}$$

Zu (v). Sei

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \text{ mit } U_i \text{ offen in X für jedes i.} \qquad (1)$$

Nach (iv) ist X Vereinigung von offenen Hauptmengen, von denen jede ganz in einem U_i liegt. Es reicht zu zeigen, bereits endlich viele dieser offenen Hauptmengen überdecken X, d.h. wir können annehmen,

$$U_i = D(f_i) \text{ für jedes } i \in I.$$

Wegen (1) haben die f_i keine gemeinsame Nullstelle, d.h. es gilt

$$V(\sum_{i\in I} f_i\bullet k[X]) = \varnothing = V(k[X]).$$

Nach 1.1.4, Aufgabe 3 gilt

$$1 \in \sqrt{k[X]} = \sqrt{\sum_{i\in I} f_i\bullet k[X]},$$

d.h. eine Potenz von 1 liegt im Ideal $\sum_{i\in I} f_i \bullet k[X]$. Dann liegt aber 1 selbst bereits in diesem Ideal. Es gibt Elemente $g_j \in k[X]$ und $i_1,...,i_s \in I$ mit

$$1 = \sum_{j=1}^{s} g_j \bullet f_{i_j}.$$

Dann haben aber bereits $f_{i_1},...,f_{i_s}$ keine gemeinsame Nullstelle. Es gilt also

$$X = D(f_{i_1}) \cup ... \cup D(f_{i_s}) = U_{i_1} \cup ... \cup U_{i_s}.$$

QED.

5b.2 Reguläre Funktionen auf offenen Hauptmengen (vgl.1.3.5)

5b.2.1 Definition

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge, $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und

$$f: U \longrightarrow k$$

eine Funktion. Dann heißt f <u>regulär im Punkt</u> $x \in U$, wenn es eine offene Menge U_x und Polynome g_x und h_x mit Koeffizienten in k gibt mit

$$x \in U_x \subseteq U \text{ und } f(y) = \frac{g_x(y)}{h_x(y)} \text{ (und insbesondere } h_x(y) \neq 0) \text{ für jedes } y \in U_x. \quad (1)$$

Die Funktion f heißt <u>reguläre Funktion</u> auf U, wenn f in jedem Punkt von U regulär ist. Die Menge der regulären Funktionen auf U wird mit

$$\mathcal{O}_X(U)$$

bezeichnet.

Bemerkungen

(i) $\mathcal{O}_X(U)$ ist eine k-Algebra.

(ii) Wir haben zu zeigen, daß die hier angegebene Definition der regulären Funktion im Fall U = X mit der bisher verwendeten übereinstimmt. Das ist gerade die Aussage des nachfolgenden Satzes.

5b.2.2 Die regulären Funktionen auf einer algebraischen Menge

Sei $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge. Dann gilt

$$\mathcal{O}_X(X) = k[X].$$

Beweis (vgl. 1.4.5). Für jedes Element $f \in k[X]$ gibt nach Definition von k[X] ein Polynom p mit Koeffizienten aus k mit

$$f(y) = p(y)/1 \text{ für jedes } y \in X.$$

Deshalb gilt

$$k[X] \subseteq \mathcal{O}_X(X).$$

Wir haben noch die umgekehrte Inklusion zu beweisen. Sei

$$f \in \mathcal{O}_X(X).$$

Dann gibt es für jedes $x \in U := X$ eine offenene Menge U_x, für welche die definierende Bedingung (1) von 5b.2.1 erfüllt ist. Wir können dabei annehmen, U_x ist eine offene Hauptmenge, sagen wir

$$U_x = D(a_x) \text{ mit } a_x \in k[X].$$

1. Schritt. Reduktion auf den Fall $a_x = h_x$

Wegen (1) gilt $D(a_x) \subseteq D(h_x)$, also $V(h_x) \subseteq V(a_x)$, also

$$a_x \in \sqrt{a_x \cdot k[X]} \subseteq \sqrt{h_x \cdot k[X]},$$

d.h. eine Potenz von a_x ist ein Vielfaches von h_x, sagen wir

$$a_x^{n_x} = h_x \cdot h'_x \text{ mit } n_x \in \mathbb{N} \text{ und } h'_x \in k[X].$$

In den Punkten von $U_x = D(a_x)$ gilt damit

$$f = \frac{g_x}{h_x} = \frac{g_x}{a_x^{n_x}/h'_x} = \frac{g_x h'_x}{a_x^{n_x}}$$

Den Nenner in der Darstellung von f können wir also durch eine Potenz von a_x ersetzen. Da sich $U_x = D(a_x)$ nicht ändert, wenn wir a_x in eine Potenz erheben, können wir annehmen,

$$h_x = a_x.$$

2. Schritt. Beweis der Behauptung im Fall $h_x = a_x$..

Die offenen Mengen $U_x = D(h_x)$ mit $x \in X$ bilden eine offene Überdeckung von X. Weil X quasi-kompakt ist, überdecken bereits endlich viele der U_x den Raum X. Wir finden also endlich viele

$$h_1, ..., h_s \in k[X] \text{ und zugehörige } g_1,..., g_s \in k[X]$$

mit

$$X = D(h_1) \cup ... \cup D(h_s) \text{ und } f = \frac{g_i}{h_i} \text{ auf } U_i = D(h_i).$$

Für je zwei Indizes $i, j \in \{1,...,s\}$ gilt

$$\frac{g_i}{h_i} = f = \frac{g_j}{h_j} \text{ auf } U_i \cap U_j = D(h_i h_j).$$

Deshalb ist $g_i h_j - g_j h_i$ gleich Null auf $D(h_i h_j)$ und $h_i h_j = 0$ außerhalb $D(h_i h_j)$. Zusammen ergibt sich:

$$h_i h_j \cdot (g_i h_j - g_j h_i) = 0 \text{ in } k[X],$$

d.h.

$$h_j^2 \cdot g_i \cdot h_i = h_j \cdot g_j \cdot h_i^2 = 0 \text{ in } k[X]. \qquad (2)$$

Weil die $D(h_i)$ den Raum X überdecken, liegt jeder Punkt in einem $D(h_i)$, d.h. in jedem Punkt ist ein h_i von Null verschieden. Damit ist

$$V(h_1^2,...,h_s^2) = \varnothing = V(1),$$

also

$$1 \in \sqrt{1 \bullet k[X]} = \sqrt{h_1^2 \bullet k[X] + \ldots + h_s^2 \bullet k[X]}.$$

Damit liegt eine Potenz von 1 im Ideal $h_1^2 \bullet k[X] + \ldots + h_s^2 \bullet [X]$. Es gibt Koeffizienten b_i mit

$$1 = \sum_{i=1}^{s} b_i \bullet h_i^2 \ , \ b_i \in k[X]. \qquad (3)$$

Für $x \in D(h_j)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} h_j^2(x) \bullet \sum_{i=1}^{s} b_i(x) g_i(x) h_i(x) &= \sum_{i=1}^{s} b_i(x) h_j(x) g_j(x) h_i^2(x) && \text{(nach (2))} \\ &= h_j(x) g_j(x) \sum_{i=1}^{s} b_i(x)\ h_i^2(x) \\ &= h_j(x) g_j(x) && \text{(nach (3))} \end{aligned}$$

also - weil $h_j(x) \neq 0$ ist -

$$f(x) = \frac{g_j(x)}{h_j(x)} = \frac{h_j(x) g_j(x)}{h_j^2(x)} = \sum_{i=1}^{s} b_i(x) g_i(x) h_i(x) = \left(\sum_{i=1}^{s} b_i g_i h_i \right)(x).$$

Weil jeder Punkt $x \in X$ in einem $D(h_j)$ liegt, gilt

$$f = \sum_{i=1}^{s} b_i g_i h_i$$

in allen Punkten von X, d.h. es ist

$$f = \sum_{i=1}^{s} b_i g_i h_i \in k[X].$$

QED.

5b.2.3 Die regulären Funktionen auf einer offenen Hauptmenge

Seien $X \subseteq k^n$ eine algebraische Menge und $f \in k[X] - \{0\}$. Dann gilt

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = k[X]_f \cong k[X][t] \,/\, (1 - t \bullet f)$$

(mit einer Unbestimmten t).

Beweis (vgl. 1.4.6).

Weil f in jedem Punkt von D(f) ungleich Null ist, gilt

$$k[X]_f = \{ \frac{a}{f^n} \mid a \in k[X],\ n \in \mathbb{N} \} \subseteq \mathcal{O}_X(D(f)).$$

1. Schritt. $k[X]_f \cong k[X][t]/(1-t \bullet f)$ als k-Algebren.

Dabei entspricht das Element 1/f der Restklasse der Unbestimmten t.

Es reicht zu zeigen, $k[X][t]/(1-t \bullet f)$ besitzt die Universalitätseigenschaft des Quotientenring $k[X]_f$ bezüglich des Homomorphismus von k-Algebren

$$\varphi : k[X] \longrightarrow k[X][t]/(1-t \bullet f),\ \alpha \mapsto \alpha \bmod (1-tf).$$

Für $p(t) \in k[X][t]$ bezeichne [p(t)] die Restklasse von p(t) im Faktorring rechts. Dann gilt

$$\varphi(f) \bullet [t] = [f] \bullet [t] = [f \bullet t] = [1].$$

Das Bild von f bei φ ist eine Einheit, deren Inverses gerade die Restklasse der Unbestimmten t ist. Die Potenzen von f, werden dann aber auch in Einheiten abgebildet.
Sei jetzt

$$\psi: k[X] \longrightarrow A$$

ein Homomorphismus von Ringen mit 1, der das Element f und damit jede Potenz von f in eine Einheiten abbildet.
Wir haben zu zeigen, ψ faktorisiert sich eindeutig über φ, d.h. es gibt ein kommutatives Diagramm von kommutativen Ringen mit 1,

$$\begin{array}{ccc} k[X] & \xrightarrow{\varphi} & k[X][t]/(1-t\bullet f) \\ \downarrow\psi & \swarrow\widetilde{\psi} & \\ A & & \end{array}$$

und eindeutig bestimmten $\widetilde{\psi}$. Nehmen wir zunächst an, $\widetilde{\psi}$ existiert und zeigen die Eindeutigkeit. Aus der Kommutativität des Diagramms folgt für $\alpha \in k[X]$:

$$\widetilde{\psi}(\alpha \bmod (1-t\bullet f) = \widetilde{\psi}(\varphi(\alpha)) = \psi(\alpha)$$

d.h. $\widetilde{\psi}$ ist auf dem von Bild k[X] eindeutig festgelegt.
Weiter ist

$$\begin{aligned} \psi(f)\bullet\widetilde{\psi}(t \bmod (1-t\bullet f)) &= \widetilde{\psi}(\varphi(f))\bullet \widetilde{\psi}(t \bmod (1-t\bullet f)) && \text{(wegen } \psi = \widetilde{\psi}\circ\varphi) \\ &= \widetilde{\psi}(f \bmod (1-t\bullet f))\bullet \widetilde{\psi}(t \bmod (1-t\bullet f)) && \text{(Definition von } \varphi) \\ &= \widetilde{\psi}(f\bullet t \bmod (1-t\bullet f)) && (\widetilde{\psi} \text{ ist ein Ring-Homomorphismus}) \\ &= \widetilde{\psi}(1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

also

$$\widetilde{\psi}(t \bmod (1-t\bullet f)) = \psi(f)^{-1}.$$

Damit ist das Bild der Restklasse von t eindeutig festgelegt. Weil k[X][t]/(1-t•f) über k[X] von dieser Restklasse erzeugt wird, ist $\widetilde{\psi}$ festgelegt.

<u>Existenz von</u> $\widetilde{\psi}$.
Wir setzen ψ auf den Polynomring fort, indem wir die Unbestimmte in $\psi(f)^{-1}$ abbilden:

$$\widetilde{\psi}': k[X][t] \longrightarrow A,\ t \mapsto \psi(f)^{-1},\ p(t) \mapsto p^{\psi}(\psi(f)^{-1}).$$

Dabei bezeichne p^{ψ} das Polynom in t, welches man aus p erhält, indem man auf alle Koeffizienten von p die Abbildung ψ anwendet.
Es gilt

$$\widetilde{\psi}'(1-t\bullet f) = \widetilde{\psi}'(1) - \widetilde{\psi}'(t)\bullet \widetilde{\psi}'(f) = 1 - \psi(f)^{-1}\bullet\psi(f) = 1-1 = 0,$$

d.h. $\widetilde{\psi}'$ faktorisiert sich über k[X][t]/(1-t•f). Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} k[X] & \overset{i}{\hookrightarrow} & k[X][t] & \overset{\rho}{\twoheadrightarrow} & k[X][t]/(1-t\bullet f) \\ & \psi\searrow & \downarrow\widetilde{\psi}' & \swarrow\widetilde{\psi}'' & \\ & & A & & \end{array}$$

Dabei ist i die natürliche Einbettung in den Polnomring, ρ die natürliche Abbildung auf den Faktorring und $\tilde{\psi}$" die Abbildung mit

$$\tilde{\psi}"(p(t) \bmod (1-t\bullet f)) = \tilde{\psi}'(p(t)) = p^{\psi}(\psi(f)^{-1}).$$

Wegen $\rho\circ i = \varphi$ faktorisiert sich damit die Abbildung ψ über φ. Die Aussage des ersten Schritts ist bewiesen.

2. Schritt. $\mathcal{O}_X(D(f)) = k[X]_f$

Die Menge

$$Y := \{(x, \lambda) \mid x \in X \text{ und } \lambda \in k \text{ mit } 1-\lambda\bullet f(x) = 0\}$$

ist eine algebraische Menge von k^{n+1}. Ihren Koordinatenring erhält man aus dem Faktorring

$$k[X][t]/(1-t\bullet f) \cong k[X]_f ,$$

indem man das Ideal (1-t•f) durch dessen Radikal ersetzt. Weil k[X] reduziert ist, ist auch $k[X]_f$ reduziert, d.h. das Ideal (1-t•f) ist gleich seinem Radikal und der Koordinationring von Y ist gleich

$$k[Y] = k[X][t]/(1-t\bullet f).$$

Damit gilt nach 1.4.5,

$$\mathcal{O}_Y(Y) = k[X]_f.$$

Die Abbildung

$$\pi: Y \longrightarrow X, (x, \lambda) \mapsto x,$$

ist injektiv, weil durch die Bedingung $1-\lambda\bullet f(x) = 0$ der Wert von λ eindeutig durch f(x) festgelegt ist. Das Bild dieser Abbildung besteht aus allen $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$. Damit ist die Abbildung

$$\varphi: Y \longrightarrow D(f), (x, \lambda) \mapsto x,$$

wohldefiniert und bijektiv. Für jede auf D(f) reguläre Funktion α ist $\alpha\circ\varphi$ regulär auf Y. Wir erhalten so eine injektive Abbildung

$$\mathcal{O}_X(D(f)) \hookrightarrow \mathcal{O}_Y(Y) = k[X][t]/(1-t\bullet f) \xrightarrow{\cong} k[X]_f \subseteq \mathcal{O}_X(D(f))$$

Andererseits ist für jedes $a \in k[X]$ und jede natürliche Zahl n, der Quotient $\frac{a}{f^n}$ eine reguläre Funktion auf D(f), die wie folgt abgebildet wird

$$\frac{a}{f^n} \mapsto \frac{a\circ\pi}{(f\circ\pi)^n} = [a]\bullet[t^n] = [a\bullet t^n] \mapsto \frac{a}{f^n}.$$

Jedes Element von $\mathcal{O}_Y(Y)$ kommt also von einem Element von $\mathcal{O}_X(D(f))$,

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathcal{O}_Y(Y) = k[X]_f$$

QED.

Index

—F—

Funktion
reguläre, auf einer offenen Menge, 3
reguläre, in einem Punkt, 3

—H—

Hauptmenge
offene, 1

—M—

Menge
  offene Hauptmenge, 1

—O—

offene Hauptmenge, 1

—R—

reguläre Funktion
  auf einer offenen Menge, 3
  in einem Punkt, 3

Inhalt

LINEARE ALGEBRAISCHE GRUPPEN 1

5B REGULÄRE FUNKTIONEN 1

5b.1. Offene Hauptmengen (vgl. 1.3.5) 1
5b.1.1 Definition 1
5b.1.2 Eigenschaften offener Hauptmengen 1

5b.2 Reguläre Funktionen auf offenen Hauptmengen (vgl.1.3.5) 3
5b.2.1 Definition 3
5b.2.2 Die regulären Funktionen auf einer algebraischen Menge 3
5b.2.3 Die regulären Funktionen auf einer offenen Hauptmenge 5

INDEX 7

INHALT 8